1979

MATEMATICHE ELEMENTARI DAL PUNTO DI VISTA SUPERIORE.

1 - Il concetto di matematica elementare è difficilmente definibile in assoluto; non è possibile infatti definirlo attraverso i contenuti, in modo distaccato dalla realtà e dal momento storico. Non è possibile definirlo attraverso le strutture ed i metodi, che sono pure legati alla situazione storicamente esistente nel momento in cui si analizza il problema. Per dare un'idea di ciò che vorremmo dire, potremmo osservare che i contenuti che oggi vengono attribuiti alla aritmetica elementare erano invece alle frontiere estreme della ricerca matematica al tempo di Leonardo Pisano. Analogamente l'algebra lineare, la teoria dei sistemi di equazioni lineari in molte incognite, oggi fa parte di un ristretto capitolo di algebra, mentre esauriva tutta l'algebra superiore (o quasi) nella seconda metà del secolo XIX.
Fatte queste precisazioni, occorre osservare che vi sono determinati contenuti che oggi, in Italia, vengono impartiti negli insegnamenti della matematica nelle scuole elementari e secondarie. L'ambito di questi insegnamenti, strettamente legato - come si vede - al momento storico ed alla situazione contingente, sarà da noi provvisoriamente considerato come attinente a quella che converremo di chiamare matematica elementare.

2 - Una volta che sia stato stabilito, almeno in via provvisoria, l'ambito delle nostre considerazioni, occorre precisare il metodo ed il punto di vista dal quale i contenuti scelti saranno presi in considerazione.

Il titolo del corso fa menzione di un punto di vista superiore; anch'esso è chiaramente relativo al momento storico nel quale il corso viene impartito, ma d'altra parte dovrebbe costituire la ragione di essere ed il motivo ispiratore fondamentale di tutto il nostro lavoro, molto più dei contenuti che saranno presi in considerazione.
Abbiamo detto che il qualificare di 'superiore' il punto di vista dal quale la materia viene considerata è strettamente legato al momento storico; questa osservazione è immediata conseguenza di ciò che abbiamo detto a proposito dell'aggettivo elementare che viene aggiunto come qualificativo dei contenuti del corso. Ma, a parte queste osservazioni del tutto ovvie, vorremmo dire che la considerazione di determinati contenuti, che vengono assunti come elementari, da un punto di vista superiore ha una sua motivazione diretta ed indiretta. Diretta vorremmo chiamare quella che si rifà alla osservazione che l'insegnante è tanto più valido quanto maggiore cultura egli possiede. Ed abbiamo detto cultura e non nozioni, perché intendiamo che il livello della cultura sia nettamente superiore a quello del semplice possesso di nozioni sparse, anche se numerosissime e specializzatissime. Invero l'uomo di cultura si avvale delle nozioni, ma le utilizza come mezzi, come strumenti per una sintesi superiore che lo conduce al possesso personale delle nozioni ed alla libertà interiore.

Vogliamo ribadire che la cultura è fondata essenzialmente sulle nozioni e sulle conoscenze specifiche; e facciamo ciò per distaccarci immediatamente da quella demagogica lotta al nozionismo che era di moda qualche anno fa e che, nelle mani di certi soggetti interessati, è diventata uno strumento di disordine e di contestazione. Ribadiamo infatti che le nozioni sono elemento necessario perché possa sussistere la cultura; questa si fonda sulle conoscenze e sullo studio, e non può esistere una cultura che sia puramente momento ludico, di gioco, che sia facile, che dispensi dallo sforzo e dal sacrificio. Pertanto risulta di grande utilità che l'insegnante, ad ogni livello di insegnamento, abbia una cultura veramente vasta e profonda, perché la cultura è condizione di libertà, è ragione e fondamento perché l'individuo possa dominare le proprie conoscenze e farne un possesso personale, un accrescimento interiore e non soltanto uno strumento - per quanto efficace - di azione sul mondo e sugli altri uomini.

È quindi molto utile, per non dire indispensabile, che l'insegnamento della matematica sia fatto da chi possiede questa materia in modo valido e sicuro e ne abbia fatto un motivo di approfondimento personale. Solo in questo modo la matematica potrà essere insegnata non come un puro attrezzo della tecnica e della vita comune, ma come un modo di pensare, uno strumento per capire le cose e per possedere pienamente la mentalità della scienza moderna; e del resto questa scienza è una caratteristica essenziale del modo di pensare e di vivere del mondo di oggi.

3 - In questo ordine di idee la visione superiore della matematica elementare appare chiaramente come la circostanza fondamentale della formazione dell'insegnante a tutti i livelli, proprio perché la matematica nelle scuole dell'ordine medio non dovrebbe esaurire la sua funzione al compito limitato di fornire delle formule e degli strumenti, ma dovrebbe giungere ad una meta ben più alta: dovrebbe arrivare a conferire i fondamenti della mentalità scientifica e della formazione culturale di base del cittadino.

È da osservarsi infatti che la pratica didattica può essere efficace soltanto se l'insegnamento viene tenuto a questo livello; in ogni altro caso la matematica corre il rischio di essere rifiutata dai discenti, oppure di essere considerata come una materia fondamentalmente arida, che molti si "rifiutano di capire" perché le formule ed i procedimenti presentati non dicono niente, nel senso dell'arricchimento interiore e della crescita umana.

Nell'insegnamento della matematica elementare dal punto di vista superiore hanno quindi importanza essenziale due momenti fondamentali: il primo potrebbe essere descritto come il momento della visione superiore sintetica, delle teorie che vengono esposte nell'insegnamento elementare abituale; il secondo potrebbe essere descritto come analisi dei fondamenti della matematica.

4 - Il primo momento, cioè quello della visione sintetica delle teorie che si trovano per così dire sparse e parcellizzate nell'insegnamento, è essenziale per la unificazione dei concetti e dei procedimenti, e quindi per la visione del filo logico che lega tra loro le varie teorie e che le fonda nel loro complesso. Si pensi, per esempio, che la geometria euclidea ha motivato storicamente la nascita della teoria delle funzioni di variabile complessa e dell'algebra moderna. Infatti, nella maggior parte dei casi, i problemi della geometria elementare danno luogo a problemi che coinvolgono la teoria delle funzioni algebriche e quindi la teoria delle funzioni di variabile complessa. Tralasciando per il momento i problemi trascendenti collegati con la rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio, e che hanno stretta connessione con le funzioni trascendenti, si può osservare che i problemi di distanze ed angoli fanno intervenire delle funzioni di variabile complessa che trovano il loro ambito naturale nella teoria delle funzioni algebriche; pertanto soltanto una visione superiore permette di avere una conoscenza globale ed approfondita di certi problemi elementari che nel corso della storia della matematica sono stati affrontati in modo

episodico e non efficace.

Inoltre la geometria elementare, così come ogni altra geometria (affine, proiettiva, ecc.) è strettamente collegata, nella visione di F. Klein, alla teoria dei gruppi di trasformazioni e quindi ad una struttura algebrica (quella di gruppo) che fornisce gli strumenti per una visione unificante di tante teorie geometriche.

Il secondo momento, cioè quello dell'analisi dei fondamenti, ha un duplice risvolto: l'uno di carattere logico e l'altro di carattere psicologico. È superfluo osservare che questo secondo risvolto ha un collegamento molto stretto con i problemi della didattica, perché dovrebbe ispirare la strategia didattica che giunge ad ottenere l’apprendimento delle nozioni con il massimo di efficacia, pur senza risparmiare ogni sforzo del discente, come vorrebbe certa utopistica pedagogia che vorrebbe essere d'avanguardia. È necessario quindi che il docente conosca e domini i problemi logici della matematica elementare, perché soltanto così si potrà conferire all’insegnamento quel carattere di rigore che è una delle caratteristiche essenziali dell'aspetto formativo della matematica. Ma è pure necessario conoscere i procedimenti psicologici dell'apprendimento, per non confondere pericolosamente la semplicità concettuale con la facilità di apprendimento e con la efficacia didattica.

Per fare un esempio, appare chiaro che la geometria euclidea si basa su un numero di postulati molto maggiore di altre geometrie (affine, proiettiva), e che questi postulati hanno delle radici psicologiche diverse: ve ne sono infatti di quelli che schematizzano delle esperienze di carattere visivo (per esempio i postulati di appartenenza), altri che schematizzano esperienze più complesse, come per esempio i postulati del trasporto rigido, che schematizzano degli insiemi di esperienze tattili, muscolari e di propriocezione molto complesse. Tuttavia è un fatto storico che la geometria euclidea, per quanto concettualmente 'complicata' è stata per secoli l'unica geometria dell’umanità: infatti le altre geometrie, anche se concettualmente più semplici, sono state costruite soltanto dopo lunghi travagli di analisi e di critica.

Queste osservazioni pongono dei problemi didattici notevoli, perché mettono in evidenza il fatto che le strutture astratte e generali non sempre sono le più semplici da insegnare e da scoprire. Vorremmo pertanto che l'insegnante avesse sempre presente il problema didattico fondamentale, che - a nostro parere - consiste nel tenere l'insegnamento a quel livello di astrazione al quale il discente, compatibilmente con le proprie conoscenze e la propria maturità intellettuale, sia motivato ad accettare le strutture astratte, constatandone di fatto la efficacia, la potenza e la generalità. In questo modo sarà anche motivato non soltanto ad utilizzare il linguaggio matematico per descrivere e conoscere la realtà, ma anche a studiare il linguaggio stesso, perché la conoscenza di questo lo arricchisce e gli conferisce i mezzi per esprimere le propri idee e costruirne di nuove e valide. Sarebbe errato, a nostro parere, un cammino didattico che portasse a presentare subito le strutture più astratte, anche se concettualmente più semplici, per giustificarle a posteriori con modelli o esempi presi dalla realtà fisica, sociale, economica; tali strutture dovrebbero invece nascere poco a poco proprio dallo studio di questa realtà, seguendo di pari passo l'approfondimento delle conoscenze del discente.